ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1) VARIABLES SEPARABLES Y HOMOGENEAS

1.1. Variables separables

$\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy$

1.2. Homogéneas

$P(x,y)$ es un Función Homogénea de grado n si $P(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n P(x,y)$

$y' = A(x,y) \;/\; B(x,y)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{- E.D. Homogénea si } A(x,y) \text{ y } B(x,y) \text{ son Homogéneas del mismo grado} \\ \text{- Todos los monomios de la ecuación tienen mismo grado} \end{array} \right.$

Cambio: $t = y / x$ ➔ $y = t\, x$ ➔ $y' = t'\, x + t$ ➔ Se transforma en V.S.

1.3. Reducibles

$$y' = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2} \qquad (A_1 x + B_1 y + C_1)\, dx + (A_2 x + B_2 y + C_2)\, dy = 0$$

Estudiar el sistema $\left\{ \begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{array} \right.$

a) Si tiene solución (x_0,y_0) ➔ Cambio $\left\{ \begin{array}{l} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{array} \right.$ ➔ Se transforma en Homogénea

b) Si no tiene solución ➔ Cambio $t = A_1 x + B_1 y$ ➔ Se transforma en V.S.

2) EXACTAS Y FACTORES INTEGRANTES

2.1. Exactas

$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0$ ➔ $\delta P / \delta y = \delta Q / \delta x$

Resolver ➔ $\delta F / \delta x = P(x,y)$ ➔ $F(x,y) = \int P(x,y)\, dx + k(y)$

Derivar ➔ $F(x,y)$ respecto de y

Sustituir en ➔ $\delta F / \delta y = Q(x,y)$

Solución: $F(x,y) = C$

2.2. Factores Integrantes

La E.D. no exacta $P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0$ admite Factor Integrante $\mu(x,y)$ si

$\mu(x,y)\, P(x,y)\, dx + \mu(x,y)\, Q(x,y)\, dy = 0$ Se convierte en E.D. Exacta

Si $(\delta P / \delta y - \delta Q / \delta x) / Q = F(x)$ ➔ $\mu(x) = e^{\int F(x)\, dx}$ (F.I. dependiente de x)

Si $(\delta Q / \delta x - \delta P / \delta y) / P = F(y)$ ➔ $\mu(y) = e^{\int F(y)\, dy}$ (F.I. dependiente de y)

3) LINEALES Y SIMILARES

3.1. Lineales

$y' + f(x)\, y = g(x)$ ➔ $y = e^{-\int f(x)\, dx} \left[C + \int e^{\int f(x)\, dx} g(x)\, dx \right]$

3.2. Bernoulli

$y' + f(x)\, y + g(x)\, y^n = 0$

Dividir la ecuación por y^n

Cambio: $z = 1 / y^{n-1}$ ➔ Se transforma en una Lineal

4) NO RESOLUBLES (NO LINEALES) EN LA DERIVADA

3.1. Resolubles en y

$y = f(y',x)$

Cambio $y' = p$

$y = f(p,x)$ es parte de la solución (en paramétricas)

Derivando respecto de x se obtiene una E.D. del tipo 1, 2 o 3.

Resolviendo la E.D. se obtiene $x= f(p,C)$ (la otra parte de la solución paramétrica)

3.2. Resolubles en x

$x = f(y',y)$

Cambio $y' = p$

$x = f(p,y)$ es parte de la solución (en paramétricas)

Se deriva respecto de x

Multiplicando y dividiendo por dy se obtiene una E.D. del tipo 1, 2 o 3.

Resolviendo la E.D. se obtiene $y= f(p,C)$ (la otra parte de la solución paramétrica)

3.3. Lagrange

$y = x\, f(y') + g(y')$

Cambio $y' = p$

$y = f(p,x)$ es parte de la solución (en paramétricas)

Derivando respecto de x se obtiene una E.D. Lineal $x' + f(p)\, x + g(p) = 0$

3.4. Clairaut

$y = x\, y' + g(y')$

Cambio $y' = p$

Derivando respecto de x se obtiene $(x + g'(p))\, p'=0$

Con $p' = 0$ ➔ $p = C$ ➔ $y = x\, C + g(C)$ ➔ Solución General de la E.D.

Con $x + g'(p) = 0$ ➔ Se obtiene una Solución Singular

ACADEMIA DE ESTUDIOS TECNICOS
C/ Dr. Marañón, 7, 1ª. 46017 VALENCIA. Tel.: 963281147

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Forma general:

$$A_n(x)\, y^{n)}(x) \;+\; A_{n-1}(x)\, y^{n-1)}(x) \;+\; \ldots\ldots\ldots\ldots A_2(x)\, y''(x) \;+\; A_1(x)\, y'(x) \;+\; A_0(x)\, y(x) \;=\; F(x)$$

Ecuación diferencial lineal de 2º orden con coeficientes constantes:

$a\, y''(x) \;+\; b\, y'(x) \;+\; c\, y(x) \;=\; F(x)$ siendo a, b, c constantes arbitrarias

Solución: $\mathbf{y \;=\; y_h \;+ y_p}$

y_h: Solución de la Ec. Homogénea asociada y_p: Solución particular de la ecuación a resolver

SOLUCION DE LA ECUACIÓN HOMOGENEA

$a\, y''(x) \;+\; b\, y'(x) \;+\; c\, y(x) \;=\; 0$ ➔ Resolver $a\lambda^2 \;+\; b\lambda \;+ c \;=\; 0$ (Ec. Característica)

Caso 1 λ_1,λ_2 reales con $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\mathbf{y_1} \;=\; e^{\lambda 1\, x}$ $\mathbf{y_2} \;=\; e^{\lambda 2\, x}$ ➔ $\mathbf{y_h} \;=\; C_1\, e^{\lambda 1\, x} \;+\; C_2\, e^{\lambda 2\, x}$

Caso 2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reales

$\mathbf{y_1} \;=\; e^{\lambda\, x}$ $\mathbf{y_2} \;=\; x\, e^{\lambda\, x}$ ➔ $\mathbf{y_h} \;=\; C_1\, e^{\lambda\, x} \;+\; C_2\, x\, e^{\lambda\, x}$

Caso 3 $\lambda_1\,,\, \lambda_2 = \alpha \pm \beta\, i$ (complejos)

$\mathbf{y_1} \;=\; e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x)$ $\mathbf{y_2} \;=\; e^{\alpha\, x}\, \mathrm{sen}(\beta\, x)$ ➔ $\mathbf{y_h} \;=\; C_1\, e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x) \;+\; C_2\, e^{\alpha\, x}\, \mathrm{sen}(\beta\, x)$

SOLUCION PARTICULAR (MÉTODO COEFICIENTES INDETERMINADOS)

Dada la Ec. Diferencial $a\, y''(x) \;+\; b\, y'(x) \;+\; c\, y(x) \;=\; F(x)$

Se puede aplicar este método si F(x) es de la forma

$F(x) \;=\; P_n(x)\, e^{a\, x} \cos(b\, x)$ ó $F(x) \;=\; P_n(x)\, e^{a\, x}\, \mathrm{sen}(b\, x)$

Entonces la solución particular tendrá la forma:

$y_p \;=\; e^{a\, x}\, [A_n(x) \cos(b\, x)\;\; B_n(x)\, \mathrm{sen}(b\, x)]\, x^k$ Donde k vale:

Si $a \pm b\, i$ no es solución de la ecuación característica ➔ **k = 0**

Si $a \pm b\, i$ es solución de multiplicidad **m** de la ec. carac. ➔ **k = m**

Derivando y sustituyendo y_p en la Ec. Diferencial se obtiene que condición debe cumplir $A_n(x)$ y $B_n(x)$.

SOLUCION PARTICULAR (MÉTODO DE LAGRANGE)

Dada la Ec. Diferencial $a\, y''(x) \;+\; b\, y'(x) \;+\; c\, y(x) \;=\; F(x)$

Se resuelve la Ec. Homogénea $a\, y''(x) \;+\; b\, y'(x) \;+\; c\, y(x) \;=\; 0$ y da como solución:

$y_h \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$ como se ha explicado anteriormente.

Se supone que la solución particular es de la forma $y_h \;=\; C_1(x)\, y_1(x) \;+\; C_2(x)\, y_2(x)$

De forma que se puede hallar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ resolviendo el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)\, y_1(x) \;+\; C_2'(x)\, y_2(x) \;=\; 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) \;+\; C_2'(x)\, y_2'(x) \;=\; F(x) / a \end{array} \right.$$

Aplicando la regla de Cramer

$$C_1'(x) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{F(x)}{a} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \;\;➔\;\; c_1(x) = \int C_1'(x)\;\, dx$$

$$C_2'(x) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{F(x)}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \;\;➔\;\; c_2(x) = \int C_2'(x)\;\, dx$$

ECUACION DE EULER

$$a_n\, (ax+b)^n\, y^{n)} \;+\; a_{n-1}\, (ax+b)^{n-1}\, y^{n-1)} \;+\; \ldots\ldots\ldots \;+\; a_2\, (ax+b)^2\, y'' \;+\; a_1\, (ax+b)\, y' \;+\; a_0\, y \;=\; F(x)$$

Cambio: $(ax+b) \;=\; e^t$ ➔ $t \;=\; \ln(ax+b)$ ➔ $dt/dx \;=\; a / (ax+b)$

Obteniendose:

$$y' = \frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt} \qquad (ax+b)y' = a\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \qquad (ax+b)^2 y'' = a^2\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$