TRANSFORMADAS DE LAPLACE

DEFINICIÓN

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-s\cdot t} \cdot f(t) \ \ dt = F(s)$$

Dada una función real f (t) ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) se transforma en una función compleja F (s) ($F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$).
A la función F (s) se le llama Transformada de Laplace de f (t) y se indica L [f (t)] = F (s).
A la función f (t) se le llama Transformada de Laplace Inversa de F (s) y se indica L^{-1} [F (s)] = f (t)

PRINCIPALES PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En adelante se considerará que F (s) = L [f (t)] y que G (s) = L [g (t)]

Propiedad de linealidad:

$$L[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot L[f(t)] + b \cdot L[g(t)] = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$$

Transformada de la derivada:

$$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0) \qquad L[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - .... - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Teorema de traslación compleja:

$$L[e^{a\cdot t} \cdot f(t)] = F(s-a)$$

Derivada de la Transformada de Laplace:

$$L[t \cdot f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} = -F'(s) \qquad L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot \frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

OTRAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Teorema de cambio de escala

$$L[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot F(\frac{s}{a})$$

Transformada de la Integral

$$L[\int_0^t f(u) \ du] = \frac{F(s)}{s}$$

Teorema de traslación real

$$L[\tilde{f}(t)] = e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$$

siendo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t-a) & si \ \ t \geq a \\ 0 & si \ \ t < a \end{cases}$$

Teorema de convolución

$$L[\int_0^t f(u) \cdot g(t-u) \ du] = F(s) \cdot G(s)$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} [s \cdot F(s)]$$

Teorema del valor final

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [s \cdot F(s)]$$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

f (t)	F (s)
a	$\frac{a}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(b \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(b \cdot t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$t^n \cdot e^{a \cdot t}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{a \cdot t} \cdot \sin(b \cdot t)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$\cosh(b \cdot t)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$\sinh(b \cdot t)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$

ACADEMIA DE ESTUDIOS TÉCNICOS
C/ Dr. Marañón, 7, 1ª. 46017 VALENCIA. Tel.: 963 281 147